

فصل ۵

نکته: چند جمله ای استاندارد چند جمله ای است که همه ی جملاتش بر حسب توان های نزولی یک متغیر مرتب شده اند.

مثال: عبارت زیر را ساده کنید و به صورت استاندارد بر حسب X بنویسید.

$$(x^2 - 3x - 1)(x^2 + x - 3)$$

$$(x^2 - 3x - 1)(x^2 + x - 3) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x + 3$$

اتحاد مربع دو جمله ای:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad \text{و} \quad (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

مثال: با استفاده از اتحاد مربع دو جمله ای طرف دوم تساوی زیر را بیابید.

$$(-1 + b^2)^2 \Rightarrow \quad (-1 + b^2)^2 = 1 - 2b^2 + b^4$$

تجزیه: تجزیه عکس عمل ضرب چند جمله ای ها است. در عمل ضرب عبارت هایی را که به صورت حاصل ضرب هستند با انجام عمل ضرب به صورت جمع چند جمله ای در می آوریم. ولی در تجزیه یک چند جمله ای را که به صورت جمع چند جمله ای است به صورت حاصل ضرب دو یا چند جمله ای دیگر در می آوریم.

تجزیه به روش فاکتورگیری:

به زبان ساده بیرون کشیدن ضرایب یا متغیرهای مشترک از جملات یک چند جمله ای و قرار دادن آن به صورت ضرب در باقیمانده ی چند جمله ای را فاکتورگیری می گویند.

مثال: عبارت $-5ax^4 + 10a^2x^2$ را تجزیه کنید.

$$-5ax^4 + 10a^2x^2 = -5ax^2(x^2 - 2a^2) \quad \text{حل:}$$

تجزیه به روش دسته بندی: گاهی نمی توان یک نماد مشترک را از کل عبارت فاکتور گرفت ولی اگر عبارت را به عبارت های کوچک تقسیم بندی کنیم و از هر کدام از آن ها عبارتی را فاکتور بگیریم در نهایت می توان یک عبارت را از کل فاکتور بگیریم:

$$\underline{x^2 + 2x^2} + x + 2 = x^2(x + 2) + (x + 2) = (x + 2)(x^2 + 1) \quad \text{مثال:}$$

نکته: گاهی اوقات قبل از اتحاد لازم است یکبار از فاکتور گیری استفاده کنیم.

مثال: تجزیه زیر را نگاه کنید.

$$8x^2 - 2x = 2x(4x^2 - 1) = 2x(2x - 1)(2x + 1)$$

نکته: گاهی اوقات برای تجزیه عبارت جبری لازم است جمله یا جمله هایی را تفکیک کنیم.

$$3x^2 + 7x + 2 = 3x^2 + \boxed{6x + x} + 2 = (3x^2 + 6x)(x + 2) \quad \text{مثال:}$$

$$= 3x(x + 2) + (x + 2) = (x + 2)(3x + 1)$$

نکته: گاهی اوقات برای تجزیه عبارت جبری لازم است جمله یا جمله هایی را حذف یا اضافه کنیم.

$$x^4 + 2x^2y^2 + 9y^4 = \boxed{x^4 + 6x^2y^2 + 9y^4} - 4x^2y^2$$

$$= (x^2 + 3y^2)^2 - 4x^2y^2 = (x^2 + 3y^2 + 2xy)(x^2 + 3y^2 - 2xy)$$

تجزیه به روش اتحاد مربع دو جمله ای:

برای تجزیه می توانیم از برخی از اتحاد ها استفاده کنیم. مثلاً اگر یک عبارت سه جمله ای داشته باشیم که دو جمله ی آن مربع کامل بوده و جمله ی دیگری ۲ برابر حاصل ضرب جذر دو جمله ی مربع کامل باشد. آن سه جمله از راه اتحاد مربع دو جمله ای به صورت زیر تجزیه می شود:

$$\left(\text{جذر جمله مربع دوم (علامت جمله ی دیگر)} \times \text{جذر جمله مربع اول} \right)^2 = \text{سه جمله ای}$$

مثال: عبارت مقابل را تجزیه کنید.

$$x^4 - 2x^2yz + y^2z^2$$

حل: عبارت سه جمله ای است و جملات اول و سوم مربع کامل و جمله ی دوم ۲ برابر حاصل ضرب جذر ها است پس می توان از اتحاد مربع دو جمله ای استفاده کرد.

$$x^4 - 2x^2yz + y^2z^2 \rightarrow \begin{cases} x^4 = (x^2)^2, y^2z^2 = (yz)^2, 2x^2yz = 2(x^2)(yz) \\ x^4 - 2x^2yz + y^2z^2 = (x^2 - yz)^2 \end{cases}$$

استفاده از اتحاد اول در مسئله ها

مثال: اگر $y^2 + z^2 = 2yz$ باشد حاصل $\frac{y^2+z^2}{2y^2-z^2}$ چه قدر است؟

حل:

$$y^2 + z^2 - 2yz = 0 \xrightarrow{\text{اتحاد}} (y - z)^2 = 0 \Rightarrow y = z$$

$$\frac{y^2+z^2}{2y^2-z^2} = \frac{y^2+y^2}{2y^2-y^2} = \frac{2y^2}{y^2} = 1$$

مثال: اگر $x + y = 7$ و $xy = 5$ باشد حاصل $x^2 + y^2$ کدام است؟

با استفاده از اتحاد مربع دو جمله ای و جایگذاری به جواب می رسیم:

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \rightarrow (7)^2 = x^2 + y^2 + 2 \times 5 \xrightarrow{\text{حل معادله}} x^2 + y^2 = 39$$

نکته: در برخی از عبارت های سه جمله وقتی بخواهیم آن ها را تجزیه کنیم به یک مشکل برخورد می کنیم و آن این است که جمله ای که باید ۲ برابر جمله ی اول در دوم باشد کم تر یا بیشتر از مقدار واقعی است. در این موارد با اضافه یا کم کردن مقدار عبارت لازم می توان اتحاد را تکمیل کرد.

مثال: با افزودن کدام عدد به عبارت $4x^2 - 6x + \frac{1}{4}$ مربع یک دو جمله ای حاصل می شود؟

حل : جمله ی $-6x$ جمله ای است که مساوی دو برابر جمله اول در دوم است اگر جمله اول $2x$ باشد با تقسیم $6x$ ابتدا بر 2 سپس بر جمله اول خواهیم دید که جمله ی دوم $-\frac{3}{4}$ می باشد

$$4x^2 - 6x + \frac{1}{4} = 4x^2 - 6x + \frac{1}{4} + \left[\frac{8}{4}\right] = 4x^2 - 6x + \frac{9}{4} = \left(2x - \frac{3}{2}\right)^2$$

نکته : روش پر کاربرد در تجزیه ی $ax^2 + bx + c$

$$ax^2 + bx + c = \frac{1}{a}(ax + m)(ax + n)$$

$$\begin{cases} m + n = b \\ m \times n = ac \end{cases}$$

مثال : عبارت $2x^2 + 7x - 9$ را تجزیه کنید.

$$\begin{cases} 2x^2 + 7x - 9 = \frac{1}{2}(2x + m)(2x + n) \\ m + n = 7 \\ mn = -18 \end{cases} \quad \rightarrow m = 9, n = -2 \Rightarrow \text{حل:}$$

$$2x^2 + 7x - 9 = \frac{1}{2}(2x + 9)(2x - 2) = (2x + 9)(x - 1)$$

نکته : اگر جمع ضرایب در یک چند جمله ای صفر باشد عبارت عامل $x-1$ دارد و اگر مجموع جملات درجه فرد با مجموع جملات درجه زوج برابر باشد . عامل $x+1$ خواهد داشت.

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2 \quad \text{اتحاد مزدوج :}$$

تجزیه به روش اتحاد مزدوج : اگر عبارتی دو جمله ای مفروض باشد که هر دو جمله ی آن مربع کامل بوده و بین آن ها علامت منفی باشد آن عبارت دو جمله ای توسط اتحاد مزدوج به صورت زیر تجزیه می شود.

(جذر جمله دوم - جذر جمله اول) (جذر جمله ی دوم + جذر جمله اول) = دو جمله ای

$$x^2y^4 - 9z^2 \quad \text{مثال : چند جمله ای مقابل را تجزیه کنید.}$$

حل: عبارت دو جمله ای می باشد و هر دو جمله مربع کامل بوده و علامت بین آن ها منفی است . پس می توان از اتحاد مزدوج استفاده کرد.

$$x^2y^4 - 9z^2 = (xy^2)^2 - (3z)^2 = (xy^2 + 3z)(xy^2 - 3z)$$

نکته : از اتحاد مزدوج می توان برای محاسبات پیچیده بهره برد.

مثال: حاصل $9998^2 - 4$ را به دست آورید.

$$9998^2 - 4 = (9998 - 2)(9998 + 2) = 9996 \times 10000 = 9/996 \times 10^7 \quad \text{حل:}$$

نکته : می توانیم از تعویض متغیر نیز استفاده کنیم.

مثال: $4x^2 - 10x - 6$ را تجزیه کنید.

حل: جمله ی اول به ما نشان می دهد که مربع عدد $4x^2 = (2x)^2$ است پس چند جمله ای را برحسب $2x$ مرتب می کنیم. داریم:

$$4x^2 - 10x - 6 = (2x)^2 - 5(2x) - 6$$

سپس با استفاده از $t = 2x$ چند جمله ای را تبدیل و تجزیه می کنیم.

$$(2x)^2 - 5(2x) - 6 = t^2 - 5t - 6 = (t + 1)(t - 6) \Rightarrow (2x + 1)(2x - 6)$$

اتحاد مکعبات دو جمله ای (اتحاد چاق و لاغر)

$$\begin{cases} (a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3 \\ (a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3 \end{cases}$$

تجزیه به کمک اتحاد مکعبات

اگر عبارتی دو جمله ای داشته باشیم که هر دو جمله ی آن مکعب باشند: آنگاه این عبارت را می توان به روش زیر تجزیه کرد.

$$\text{دو جمله ای} = \left(\sqrt[3]{\text{جمله اول}} \pm \sqrt[3]{\text{جمله دوم}} \right) \left(\left(\sqrt[3]{\text{جمله اول}} \right)^2 \mp \sqrt[3]{\text{جمله اول}} \times \sqrt[3]{\text{جمله دوم}} + \left(\sqrt[3]{\text{جمله دوم}} \right)^2 \right)$$

مثال: عبارت $a^6 - 64b^6$ را تجزیه کنید.

اتحاد مکعب دو جمله ای

$$\begin{cases} (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \end{cases}$$

ترکیب و تعمیم اتحادها:

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$$

$$x^3 + y^3 = (x - y)^3 + 3xy(x + y)$$

$$(x + y)^3 - (x - y)^3 = 6xy(x + y)$$

$$(x - y)^3 - (x + y)^3 = -6xy(x + y)$$

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$$

$$x^3 - y^3 = (x - y)^3 + 3xy(x - y)$$

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz)$$

$$(x - y)^3 + (x + y)^3 = 2x^3 + 2y^3$$

@riazicafe

