

## قسمت چهارم: عبارت‌های جبری

**درجه:**

نکته: ابتدا عبارت داده شده را ساده کنید و سپس به سؤالات درجه پاسخ دهید.

سؤال ۱: درجهٔ عبارت  $x^6 - 2x^3y^6 + 3x^2y^5 - y^6 + x^4y^4$

بر حسب  $x, y$  -

بر حسب  $xy$ ,  $y$  می‌شود زیرا:

$$(xy)^6 x^6 - 2(xy)^3 y^6 + 3(xy)^2 y^5 - y^6 \times (xy)^0 + \underline{\underline{(xy)^4 y}}$$

بر حسب  $xy$ ,  $y$  می‌شود زیرا:

$$(xy^2)^6 x^6 - 2(xy^2)^3 y^6 + 3(xy^2)^2 y^5 - (xy^2)^0 y^6 + (xy^2)^4 x^2 y$$

سؤال ۲: عبارت  $(x+y+z+v+w)(z+v+w+p+q)$  پس از ساده شدن، چند جمله دارد؟

۲۵ (۴)

۲۲ (۳)

۲۰ (۲)

۱۸ (۱)

نکته: اگر  $x > 0 \Rightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2$

اگر  $x < 0 \Rightarrow x + \frac{1}{x} \leq -2$

سؤال ۳: اگر  $x < 0$  باشد، کمترین مقدار عبارت  $\frac{2x^4 - 3x^2 + 2}{x^2}$  چه قدر است؟

۱ (۴)

-۱ (۳)

-۲ (۲)

۰ (۱)

نکته: اگر مجموع چند عبارت نامنفی، صفر شود، هر یک از آن‌ها صفر هستند.

سؤال ۴: مقدار  $y$  در سؤال مقابل چه قدر است؟

$$2x^2 + y^2 - 8x - 2y + 2xy + 1 = 0$$

۲ (۴)

۱ (۳)

-۱ (۲)

۰ (۱)

سؤال ۵: اگر  $3ab = -a^3b - 7b$  و  $3ab = -3a^3b + ab - 9b$  باشد، مقدار  $a$  چه قدر است؟

۱ (۴)

-۱ (۳)

۲ (۲)

۰ (۱)

نکته: در سؤالات شرطی، می‌توانید به جای متغیرها، اعداد دلخواه قرار دهید تا در شرط صدق کنند. سپس

آن اعداد را درون عبارت قرار داده و حاصل را به دست آورید.

سوال ۶: اگر  $x + y = 2$  باشد، حاصل عبارت زیر چه قدر است؟

$$x^4 + y^4 - x^3y^2 - x^2y^3 + 16xy$$

-۱۶ (۴)

۱۶ (۳)

۸ (۲)

-۸ (۱)

سوال ۷: اگر  $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 6z = -14$  باشد، حاصل  $x + y - z$  چه قدر است؟

۱۶ (۴)

-۱۰ (۳)

۶ (۲)

۰ (۱)

سوال ۸: اگر  $\frac{(x-y)(x+y+z)^2}{x^5+y^5+z^5}$  باشد، حاصل عبارت  $x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx$  چه قدر است؟

۲ (۴)

-۱ (۳)

۱ (۲)

۰ (۱)

نکته: در عبارت‌های درجه‌ی دوم  $ax^2 + bx + c$ ، کمترین ( $a > 0$ ) یا بیشترین ( $a < 0$ ) مقدار به‌ازای

$$x = -\frac{b}{2a}$$

سوال ۹: کمترین مقدار عبارت  $\frac{3}{4}x^2 - 7x + 1$  چه قدر است؟

-۳ (۴)

۲ (۳)

-۱ (۲)

۱ (۱)

سوال ۱۰: کوچک‌ترین عدد طبیعی  $n$  به‌طوری که عبارت  $4^{1000} + 4^{623} + \dots + 4^n$  مربع کامل باشد، چه قدر است؟

۲۱۵ (۴)

۲۴۵ (۳)

۳۴۵ (۲)

۱۲۴۶ (۱)

سوال ۱۱: معادله‌ی  $1 = 9^x - 6^x - 4^x - 3^x + 2^x$  چند جواب در مجموعه‌ی اعداد حقیقی دارد؟

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

جواب ندارد.

۶۴ (۴)

۳۲ (۳)

۱۶ (۲)

۸ (۱)

سوال ۱۳: حاصل عبارت  $\sqrt{10 + 3\sqrt{10 + 3\sqrt{10 + 3\sqrt{\dots}}}}$  چه قدر است؟

۱۳ (۴)

۱۰ (۳)

۵ (۲)

۳ (۱)

سوال ۱۴: عبارت  $33x^2 + ax + 33$  را به حاصل ضرب دو، دو جمله‌ای درجه اول با ضرایب صحیح تجزیه می‌کنیم. در این صورت در مورد  $a$  کدام عبارت درست است؟

۴) نمی‌توان مشخص کرد.

۳) صفر است.

۲) زوج است.

۱) فرد است.

سوال ۱۵: عدد طبیعی  $-x$ ، یکی از شمارنده‌های عبارت  $10 - 2x + 3x^2$  است. در این صورت حاصل جمع کل مقادیری که می‌توان به جای  $x$  قرار داد، چه قدر است؟

۵۱ (۴)

۴۹ (۳)

۴۳ (۲)

۳۹ (۱)



سوال ۱۶: اگر  $a^2 - a - 10 = 0$  باشد، کدام عبارت زیر در مورد حاصل عبارت  $(a+1)(a+2)(a-4)$  درست است؟

- ۲) مثبت و گنگ است.  
۴) گویای غیرصحیح است.

نکته: برای به دست آوردن مجموع ضرایب در عبارت های جبری، کافی است به جای متغیرها، عدد ۱ قرار داد.

سوال ۱۷: مجموع ضرایب در حاصل عبارت زیر، چقدر است؟

$$(1398x^7 - 1399y^5)(3x^6 - 1)(7x^2 + 4xy^5 - 2y)$$

$$0 \quad (4) \quad -63 \quad (3) \quad +18 \quad (2) \quad -18 \quad (1)$$

### نامعادله

سوال ۱۸: نامعادله زیر را حل کنید.

$$\frac{(x^4 + 1)(3x + 6)}{x^2 - 3x} > 0$$

نکته:  $|x| \leq a \Rightarrow -a \leq x \leq a$

$$|x| \geq b \Rightarrow \begin{cases} x \geq b \\ \text{یا} \\ x \leq -b \end{cases}$$

سوال ۱۹: مجموعه جواب نامعادله  $|x|(1+x) < 0$  را روی محور اعداد نمایش دهید.

سوال ۲۰: مجموعه جواب نامعادله  $\sqrt{x-1} \leq |x-1|$  کدام است؟

$$\{x | x \geq 3\} \quad (4) \quad \{x | x \geq 2\} \cup \{1\} \quad (3) \quad \{x | 1 < x < 2\} \quad (2) \quad \{1, 2\} \quad (1)$$

نکته: برای اعداد حقیقی و مثبت  $a, b, c$ ، همواره داریم:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$$

اثبات:

$$(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2 \geq 0$$

نکته: مجموع مربعات دو عدد حقیقی، همواره بزرگتر از ۲ برابر حاصل ضرب آنها است زیرا:

$$(a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 - 2ab \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab$$

نکته: برای هر دو عدد حقیقی مثبت  $a$  و  $b$ ، میانگین ۲ عدد، بزرگتر یا مساوی جذر حاصل ضرب آن دو عدد است زیرا:

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \Rightarrow a + b - 2\sqrt{ab} \geq 0 \Rightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

نکته: مربع مجموع دو عدد حقیقی، همواره بزرگتر یا مساوی ۴ برابر حاصل ضرب آنها است:

$$(x + y)^2 \geq 4xy$$

سوال ۲۱: چند عدد دو رقمی وجود دارد که اگر جای رممهای آن را عوض کنیم، عدد حاصل حداقل ۳ برابر عدد اولیه می‌شود؟

۵) ۴

۶) ۳

۸) ۲

۱۰) ۱

# و جد اسدی کیا

**پاسخنامه تشریحی سوالات قسمت چهارم (عبارت‌های جبری)**

۱- در متن درس نوشته شده است.

$$5 \times 5 = 25$$

۲- گزینه (۳) تعداد کل جملات قبل از ساده کردن:

$$zv, zw, vw$$

$$25 - 3 = 22$$

تعداد جملات پس از ساده شدن

۳- گزینه (۴)

$$\frac{2x^4}{x^2} - \frac{3x^2}{x^2} + \frac{2}{x^2} = 2x^2 - 3 + \frac{2}{x^2}$$

$$= 2(x^2 + \frac{1}{x^2}) - 3 \Rightarrow 2 \times 2 - 3 = 1$$

۴- گزینه (۳)

$$2x^2 + y^2 - 8x - 2y + 2xy + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \underline{x^2} + x^2 + y^2 - \underline{6x} - 2x - 2y + 2xy + \underline{9} + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (x^2 - 6x + 9) + (x^2 + y^2 + 1 + 2xy - 2x - 2y) = 0$$

$$\Rightarrow (x - 3)^2 + (x + y - 1)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 3 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 3} \\ x + y - 1 = 0 \Rightarrow 3 + y - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{y = -2} \end{cases} \Rightarrow x + y = 3 - 2 = 1$$

۵- گزینه (۴)

$$\left. \begin{array}{l} -3a^2b + ab - 9b = 0 \\ +a^2b + 3ab + 9b = 0 \end{array} \right\} \xrightarrow{+} -2a^2b + 4ab - 2b = 0$$

$$\Rightarrow -2b(a^2 - 2a + 1) = 0 \Rightarrow a^2 - 2a + 1 = 0 \Rightarrow (a - 1)^2 = 0 \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

۶- گزینه (۳) کافی است به جای مثلاً  $x$ ، مقدار صفر و به جای  $y$ ، عدد ۲ قرار دهیم. داریم:

$$0 + 2^4 - 0 - 0 + 0 = 16$$

۷- گزینه (۲) عدد ۱۴ را به صورت  $4 + 1 + 9$  می‌نویسیم. داریم:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 6z + 14 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 + z^2 + 6z + 9 = 0$$

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z + 3)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = -3 \end{cases}$$

در نتیجه  $x + y - z = 2 + 1 + 3 = 6$  است.

-۸- گزینه (۱) دو طرف شرط را ۲ برابر می کنیم. داریم:

$$2x^r + 2y^r + 2z^r = 2xy + 2yz + 2zx$$

$$x^r + x^r + y^r + y^r + z^r + z^r - 2xy - 2yz - 2zx = 0$$

$$(x-y)^r + (x-z)^r + (y-z)^r = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ x-z=0 \Rightarrow x=y=z \\ y-z=0 \end{cases}$$

-۹- گزینه (۲)

$$x = \frac{-(-7)}{2 \times 1 \frac{3}{4}} = \frac{7}{\frac{5}{4}} = 2 \Rightarrow 3 \times (2)^r - 7 \times (2) + 1 = -1$$

-۱۰- گزینه (۳)

$$2^n + 2^{1246} + 2^{000} \Rightarrow \begin{cases} (2^n + 2^{1000})^2 \Rightarrow 2 \times 2^n \times 2^{1000} = 2^{1246} \Rightarrow n = 245 \\ (2^n + 2^{623})^2 \Rightarrow 2^1 \times 2^n \times 2^{623} = 2^{000} \Rightarrow n = 1376 \end{cases}$$

پس  $n = 245$  جواب مسئله است.

-۱۱- گزینه (۲) اگر  $3^x = b$  و  $2^x = a$  باشد، داریم:

$$2^x + 3^x - 4^x + 5^x - 9^x = 1$$

$$\Rightarrow a + b - a^r + ab - b^r = 1$$

دو طرف را ۲ برابر می کنیم. داریم:

$$2a + 2b - 2a^r + 2ab - 2b^r = 2$$

$$\Rightarrow (a-b)^r + (a-1)^r + (b-1)^r = 0 \Rightarrow \begin{cases} a-b=0 \Rightarrow a=b \\ a-1=0 \Rightarrow a=1 \Rightarrow a=b=1 \\ b-1=0 \Rightarrow b=1 \end{cases}$$

پس  $a = b = 1$  در نتیجه  $x = 0$  است.

-۱۲- گزینه (۳) با استفاده از اتحاد مزدوج داریم:

$$2^{16} - 1 = (2^8 - 1)(2^8 + 1) = (2^4 - 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1) = 15 \times 17 \times 257 = 3^1 \times 5^1 \times 17^1 \times 257^1$$

$$\Rightarrow 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16 \Rightarrow 16 \times 2 = 32$$

-۱۳- گزینه (۴)

$$A = \sqrt{1^0 + 3\sqrt{1^0 + 3\sqrt{1^0 + 3\sqrt{\dots}}}}$$

$$A^r = 1^0 + 3A \Rightarrow A^r - 3A - 1^0 = 0 \Rightarrow (A-5)(A+2) = 0 \Rightarrow A = 5$$

(۲) - ۱۴ گزینه‌ی

$$(Mx^r + ax + N) = (Mx + N)(Fx + E) = MFx^r + (M \cdot E + N \cdot F)x + N \cdot E$$

$$\Rightarrow M \cdot F = 33 , M \cdot E + N \cdot F = a , N \cdot E = 33$$

۳۳ عددی فرد است، پس  $M \cdot E + N \cdot F$  نیز فرد هستند پس  $a$  حتماً زوج است.

(۱۵) - گزینہ (۴)

$$\begin{array}{r} 3x^2 - 2x + 1 = \\ \hline -3x^2 + 6x \\ \hline 4x + 1 \\ \hline -4x - 4 \\ \hline 5 \\ \end{array} \quad \Rightarrow 3x^2 - 2x + 1 = (x - 2)(3x + 4) + 1$$

با توجه به رابطه‌ی اخیر، عدد ۱۸ باید بر  $-2 - x$  بخش‌پذیر باشد. با توجه به این که  $-2 - x$  باید طبیعی باشد، پس  $-2 - x$  یکی از اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۱۸ است که برای  $x$  مقدارهای ۳، ۴، ۵، ۸، ۱۱ و ۲۰ به دست می‌آید که مجموع آن‌ها ۵۱ است.

(1) - گنہ (۱۶)

$$a^r - a - 1 = 0 \Rightarrow a^r = a + 1.$$

$$\begin{aligned}(a+1)(a+2)(a-4) &= (a^2 + 3a + 2)(a - 4) = (a^2 + 3a + 2)(a - 4) \\&= 4(a + 2)(a - 4) = 4(a^2 - a - 12) = 4(-16) = -64 \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

(۱) - ۱۷ گزینه‌ی

$$(1398 - 1399)(3 - 1)(7 + 4 - 2) = -18$$

- 1 -

$$\frac{\overbrace{(x^2+1) \times (3x+6)}^{x=-2} > 0}{\underbrace{x(x-3)}_{x=3}} \Leftrightarrow$$

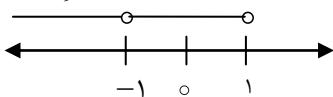
$x$	$-\infty$	$-2$	$0$	$2$	$+\infty$
$x^2 + 1$	+	+	+	+	+
$3x + 6$	-	+	+	+	+
$x$	-	-	+	+	+
$x - 2$	-	-	-	+	+
$(x^2 + 1)(3x + 6)$	-	+	-	+	+
$x(x - 2)$	+	-	+	-	+

- 19

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 - |x| > 0 \Rightarrow 1 > |x| \Rightarrow -1 < x < 1 \\ 9 \\ 1 + x > 0 \Rightarrow x > -1 \end{array} \right. \Rightarrow -1 < x < 1 \quad \text{رابطہ (1)}$$

یا

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 - |x| < 0 \Rightarrow |x| > 1 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x > 1 \\ x < -1 \end{array} \right. \\ \text{و} \\ 1 + x < 0 \Rightarrow x < -1 \end{array} \right. \Rightarrow x < -1 \quad \text{رابطه (۲)}$$

رابطه (۲)  $\cup$  رابطه (۱)

- ۲۰- گزینه (۳) عدد ۱ و ۲ در نامعادله صدق می‌کنند پس گزینه‌های (۲) و (۴) حذف می‌شوند. عدد ۳ در نامعادله صدق می‌کند، پس گزینه (۳) جواب است.

- ۲۱- گزینه (۳) آن عدد را  $\overline{xy}$  در نظر می‌گیریم. داریم:

$$\overline{yx} \geq 3\overline{xy} \Rightarrow 1 \cdot y + x \geq 3 \cdot x + 3y \Rightarrow 7y \geq 29x$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x} \geq \frac{29}{7} \Rightarrow \frac{y}{x} \geq 4 \frac{1}{7} \Rightarrow \frac{y}{x} \in \left\{ \frac{5}{1}, \frac{6}{1}, \frac{7}{1}, \frac{8}{1}, \frac{9}{1}, \frac{9}{2} \right\}$$

پس اعداد دو رقمی ممکن عبارت‌اند از ۲۹, ۱۹, ۱۸, ۱۷, ۱۶, ۱۵ که تعداد آن‌ها ۶ تا است.